# 23　函數論初歩漫談

清水辰次郎（阪大）

1. 紙上談話會ガ毎週發行トナツテヰルコトハ如何ニソノ活動ガ盛ンダカヲ語ルモノデ甚ダ愉快ナ事ト思フ。然シ同一方面ノ研究家ノ數ガ少イカラデモアルガ、談話會上ノ問題ニツイテ議論百出ノ状ヲ呈スルコトガ極メテ少イノハ遺憾デアル。筆者ハソンナ意味デ自分ノヤツテヰル事ヲ書キタクハアルガ、後ニユヅツテ、先ヅ最モ普遍的ナ話題ヲ呈出スルツモリナノデアル。

2. 複素變數函數論ノ基礎的ナ部分ハ兎角疎カニサレ勝ナモノト見エテ ソレラノ部分ガ書物ニ書イテアルノヲ見ルト一寸シタ事ナガラドウモ滿足ノイカナイモノガ多イ。或領域デ正規ナ函數 $f(z)$ ガソノ内部ノ一點 $z_0$ ニテ $f'(z_0)\neq 0$ ナラバ $z_0$ ヲ通ル曲線ハ $f(z)$ ニヨツテ等角ニ寫像セラレルト云フ定理ハ何レノ書物ニモ載ツテヰルシ、ソノ證明モ大体苦情ハ云ハレナイ。然シナガラ、ソノ逆ニアタル、$f(z)$ ニヨリ等角ニ寫像セラレルナラバ $f(z)$ ハ正則ダト云フ定理ニナルト大抵ノ本ハアマリ嚴密デナイ様ニ思ハレル。ソレデハドウシタラ良イカト云フト、眞ノ名案ハナイノダガ、次ノ様ニヤツタラドウカト思フ。尤モコレハ早急ノ間ノ出來事ダカラ、遙カニ、モツト好イ考ヘヲオ持チノ方ガアルダロウト思ツテ實ハソレガ伺ヒタクテ、コレヲ書イテヰル次第デアル。尤モ上記ノ逆ニアタル定理ハ純理論的カ、或ハ極初等的ニシカ他ニハアマリ役ニ立タナイモノデ近頃ノ書物ニハ書イテナイモノガ多イ。然シ、トモ角モ基礎的ナ部分ニハチガヒナイ。以下ノ話ハ暑サノ折柄當教室吉田耕作君，角谷靜夫君達ト駄辯リナガラ書イタモノデ人ノ智慧ガ交ツテヰル。然シ反ツテ山ヘ登ツテヰルカモ知レナイ。

何ハ兎モ角等角寫像ト云フ定義カラ始メネバナルマイ。

一点 $z_0$ ニテ相交ル二ツノ切線ヲモツ長サアル単一連續線

$$C_1 : \; z_1(s) = x_1(s) + i y_1(s) \;, \quad z_1(0) = z_2(0) = z_0$$

$$C_2 : \; z_2(s) = x_2(s) + i y_2(s) \;, \quad 0 \leqq s \leqq 1$$

（$s$ ハ $z_0$ ヨリ測ッタ曲線 $C$ ノ長サ）

ヲ考ヘ、一價函數 $w = f(z)$ ニヨルソレラノ寫像、即チ

$$\left.\begin{array}{ll} C_1' : & w_1(s) = f(z_1(s)) \\ C_2' : & w_2(s) = f(z_2(s)) \end{array}\right\} , \quad 0 \leqq s \leqq 1 \;, \quad f(z_0) = w_0$$

ガ切線ヲモツ単一連續曲線ナリト假定スルトキ、$C_1', C_2'$ ノ $w_0$ ニテナス角ト $C_1, C_2$ ノ $z_0$ ニテナス角トガ大キサ及ビ向キニ於テ一致スル即チ

$$\lim_{s \to 0} \operatorname{Arg} \frac{w_2(s) - w_2(0)}{s} - \lim_{s \to 0} \operatorname{Arg} \frac{w_1(s) - w_1(0)}{s}$$

$$\cancel{= \operatorname{Arg} z_2'(0) - \operatorname{Arg} z_1'(0)}$$ （正誤ヲ見ヨ）

ナラバ上ノ寫像ハ $z_0$ ニ於テ角ノ不変性ヲ有スルト云ヒ、

又 $C_1$ 上ノ一点 $Q$, $C_1'$ ノ上ノ之ニ対応スル点ヲ $P$ トセバ

$\displaystyle\lim_{Q \to z_0} \frac{\overline{P w_0}}{\overline{Q z_0}}$ ガ曲線 $C_1$ ニ無関係ニ一定有限ナラバ線分ノ不変性ヲ有スト云フ。

角ノ不変性ト線分ノ不変性ヲ併有スル一價函数ニヨル寫像ヲ等角寫像ト云フ。

斯クスレバ一價函數 $f(z)$ ガ或領域ノ内ノ全テノ點ニ於テ等角写像ノ性質ヲモテバ $f(z)$ ハソノ領域ニテ正則ニシテ且 $f(z) \neq 0$ デアル.

倘普通ハ $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ ヲ考ヘ $z$ ガ $C_1$ 上ヲ $z_0$ ニ近ヅケバコノ極限値ガ $C$ ニ無関係ニ一定ニ存在スルカラ $f'(z)$ ガ存スルトミル論法デアルガ, $z$ ガ $z_0$ ニ近ヅクノハ切線ノアル線ニ沿フテノ時ダケシカ假定シテヰナイ. $f'(z)$ ノ存在ニハ $|z-z_0$ ナル任意ノ近ヅキ方デナケレバナラナイカラ上ノ事ダケデハ少シ言語ガ足ラナイ様ニ思フ.

倘, 角ノ不変性カラ

$$\lim \operatorname{Arg}\frac{W_1(\Delta)-W_1(0)}{\Delta}-\lim \operatorname{Arg}\frac{z_1(\Delta)-z_1(0)}{\Delta}$$

ガ曲線 $C_1$ ニ関セズ一定デアルカラ, $C_1$ ニ関セス

$$\lim_{\Delta\to 0} \operatorname{Arg}\frac{W_1(\Delta)-W_1(0)}{z_1(\Delta)-z_1(0)}$$

ガ存在シテ一定シテヲリ, 又同ジク線分ノ不変性カラ, $C_1$ ニ関セス

$$\lim_{\Delta\to 0}\left|\frac{W_1(\Delta)-W_1(0)}{z_1(\Delta)-z_1(0)}\right|$$

ガ存在(有限)シテ一定デアル.

ヨッテ $\displaystyle\lim_{\Delta\to 0}\frac{W_1(\Delta)-W_1(0)}{z_1(\Delta)-z_1(0)}$ ガ $C_1$ ノ如キ曲線上ニテ $z\to z_0$ ナルトキハ $C_1$ ニ関セズ一定。ヨッテ今 $C_1$ トシテ $x$ 軸, $y$ 軸ニ夫々平行ナ線分ヲ考ヘ $z$ ヲソレニ沿フテ $z_0$ ニ近ヅケルコトニヨッテ(普通ノ如クシテ)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad w=u+iv$$

ヲ得ル. 即チ $u_x, u_y, v_x, v_y$ ガ領域内全テノ點デ存在

Cauchy–Riemann ノ條件ヲ滿足スルノデアル。依ッテ Looman–Menchoff ノ定理（之ハ初等的ニハ $u_x, u_y, v_x, v_y$ ノ連續性又ハ $u, v$ ノ全微分可能性ヲ假定シテ証明セラレルノデアルガ、連續性ナシデ成立スルコトハ Looman ニヨッテ証明ガ与ヘラレタガ後 Ridder 其他ノ人々ハソノ証明ニ欠点ヲ指摘シタ。然シ Ridder 自身モ証明ヲ与ヘ得ナカッタ後ニ Menchoff ガ 1932年 Looman ノ欠点ヲ補ヒ完全ナ証明ヲ与ヘ S. Saks ガ其"積分論"ナル書物ニ発表シタ）依ッテ我々ハココデ上ノ定理ヲ Looman–Menchoff ノ定理ト呼バウ）ニヨッテ $f(z)$ ハソノ領域ニテ正則デアル。$f'(z_0) \neq 0$ ナルコトハ、既ニ $f(z)$ ノ正則性ガワカッタ上ハ角ノ不変性カラ明デアル。

併シ Looman–Menchoff ノ定理ハ大シタ面倒ナモノデハナイガ実変数函数論ノ知識ヲ多少使用セネバナラズ初等的トハイハレ

依テ上ノ結果ハ初等的ナ函数論ノ本ニ書クワケニハイカナイダラウ。

$u_x, u_y, v_x, v_y$ ガ領域ニテ連續ダト云フ假定ヲ入レルナラ角ノ不変性丈デ充分デアル。

然シドウモ等角ナラ正則ダト云フ定理ニ $u_x, u_y \cdots$ 等ノ連續性ヲモ假定スルノハ幾何学的性質ノ他ニ何カ餘計ナ假定ヲスル様デ気持チガワルイ。

尤モ連續性ヲ全部假定シナクトモ $u_x, u_y$ ノイヅレカ一ツ $v_x, v_y$ ノイヅレカ一ツ、都合ニツ丈假定スレバ宜シイ。或ハ更

假定ヲ減ジテ u及ビ v ノ全微分可能性（$\Delta u = u_x\Delta x + u_y\Delta y + \varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ ナルトキ $\varepsilon\to 0$）ヲ假定スレバヨイ。

コレハ別段新シイ方法デハナイガ角ノ不變性ハ $\Theta_1-\Theta_2=\theta_1-\theta_2$, 即チ $\Theta=\theta+c$, c ハ常數, ナルコトデアルカラ

$$tg\,\Theta = \frac{dv}{du} = \frac{v_x+v_y\frac{dy}{dx}}{u_x+u_y\frac{dy}{dx}} = \frac{v_x+v_y\,tg\,\theta}{u_x+u_y\,tg\,\theta} = tg(\theta+c).$$

コノ関係ハ $\theta$ ノスベテノ real ナ値ニ対シテ成立スルカラ complex ナ $\theta$ ニ対シテモ成立スル。$\theta = s+it$ トオキ, s ヲ固定シテ $t\to+\infty$ ト, スレバ $(v_x+iv_y)/(u_x+iu_y)=i$. コレヨリ, $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ (Cauchy-Riemann) ヲ得ル。上ノ $\Theta$ ト $\theta$ トノ関係ハ等角寫像性カラ眞ノ變換ニ違ヒナイカラ $\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{vmatrix}\neq 0$, 即チ Cauchy-Riemann ノ関係式カラ $|f'(z)|\neq 0$。

トコロガ領域ノ任意ノ点ニテ u, v ガ全微分可能（$u_x, u_y, v_x, v_y$ ガ連續ナラバ勿論 u, v ハ全微分可能）デ且ツ Cauchy-Riemann ノ関係式ヲ満足スレバ f(z) ガ存在スル事ハ普通ノ書物ニ証明サレテヰル通リデ良イ。（高木貞治先生；岩波講座、解析概論364頁）

即チ u, v ガ或領域ノスベテノ点デ全微分可能ナルトキ、ソコデ角ノ不變性ヲモテバ f(z) ハソノ領域デ正則デアル。

Cauchy-Riemann ノ関係式トイヘバ、ソレヲ満足スルコトガ u+iv ガ正則ナルタメニ充分デアルトイフコトヲ、或ル書物デハ $\Delta y:\Delta x \to m$ ナルトキ

$$\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}\to\frac{u_x+mu_y+i(v_x+mv_y)}{1+im}=u_x+iv_x$$

ダト証明シテヰル。然シコレハ $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ ニテ $\Delta z\to 0$ ナラシメルトキ切線ヲ有スル曲線ニ沿ツタモノデ、$f'(z)$ ガ存在スルコトヲイフニハ任意ニ $\Delta z\to 0$ ナラシメタトキモ考ヘナケレバナラナイ。

領域内デ Cauchy-Riemann ノ関係式ガ成立スレバ、互ニ直角ニ方向ノ微分係数ガ存在シテ一致スレバソコデ正則ナルコトハ -ooman-Menchoff ノ定理デ明カダカラ、領域ノ場合ハ切線ノアル曲線ニ沿ツタトキダケ極限ガ一致スレバ十分ナコトハワカルガ一点 $z_0$ ニ於テ考ヘルトキ 切線ノアル曲線ニ沿ヘバ $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=k$ トイフコトヨリ $f'(z_0)$ ノ存在ガワカルダロウカ。答ハ然リト云ヘル。

何者、モシ或点集合デ $\Delta z\to 0$ ナルトキ $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ ガ存在シナイカ又ハ $k$ ト異ナレバソノウチカラ適当ナ点列 $\{z_i\}$ ヲエラビ $\frac{f(z_0+\Delta z_i)-f(z_0)}{\Delta z_i}\to l\neq k$ ナラシメルコトガデキル。$(\Delta z_i=z_i-z_0,\ \Delta z_i\to 0)$

$\{z_i\}$ ノ部分列 $\{z_{n_i}\}$ ヲエランデ、コレガスベテ $z_0$ ヲ通リ、且ツ $z_0$ デ切線ヲモツ曲線 $C$ ノ上ニノツテヰル様ニスル「コト」ガ出来レバ

$$\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ z_0+\Delta z \text{ on } C}}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=k\ ,\quad \lim_{\Delta z_{n_i}}\frac{f(z_0+\Delta z_{n_i})-f(z_0)}{\Delta z_{n_i}}=l$$

トナツテ矛盾ガオコル。ヨツテ「」ガ可能ナルコトヲ証明スレバヨイ。

$z_0$ ノ近傍ヲ $z_0$ ヲ頂点トスル8個ノ45°ノ角ニワケル。$\{z_i\}$ ノ点ガ、コレラノ辺ノドレカ一ツノ上ニ無限個アレバソノ辺ヲ $C$ トトレバヨイ。ソレ以外ノ時ハ少クトモ一ツ $\{z_i\}$ ノ点ヲ無限個ソノ内部ニ含ム角ガアル。コノ角ヲ $A_1$ トシソノ内部ノ $\{z_i\}$ ノ点ヲ $z_{n_1}$ トスル。$z_{n_1}$ カラ $A_1$ ノ二辺ニ平行ナ線ヲ引キ、$A_1$ ノ二辺トデ平行四辺形ヲ作ル。$A_1$ ノ二等分線デコノ平行四辺形ヲ二分スル。スルトソノウチ少クトモ一ツハ $\{z_i\}$ ノ点ヲ無限個含ム。コノ $A_1$ ノ二等分角ヲ $A_2$ トシ $A_2$ ノ内部ニ $z_{n_2}$ ヲ $|z_{n_2}|<\frac{|z_{n_1}|}{2}$ デ且ツ先ノ平行四辺形ニ属スルヨウニトル。以下同様ニ $z_{n_3}, z_{n_4}, \cdots$ ヲトリ、折線 $z_{n_1}z_{n_2}\cdots$ ニ近イ曲線ヲ作ルト $z_0$ ニテ切線ヲモツ単一曲線デ且ツ $\{z_{n_i}\}$ ガスベテソノ上ニノツテ

ナル曲線Cヲ作ルコトガデキル。(長サモアルヨウニデキル)

但、モトノ等角写像ノ問題ニ立戻ッテ見レバ角ノ不變性ト線分ノ不変性トカラ任意ノ切線ノアル(長サアル)曲線ニ沿ッテ

$$\lim_{s\to 0}\frac{w(s)-w(0)}{z(s)-z(0)}$$

ガ存在スルカラ如何ナル点列デモ $\Delta z\to 0$ ナラバ

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

ガ存在スルコト、即チ $f'(z_0)$ ガ存在スルコトガ云ヘル。

等角写像ノ性質ヲモツスベテノ点デ $f'(z)$ ガ存在スルカラ領域内デ等角写像ノ性質ヲモテバソコデハ正則トナルコトガワカル。($f'(z_0)\neq 0$ ナルコトモ云ヘル)

コノ証明ナラ初等的ダガ厳密ニヤレバ少シ長クハカヽルガ函数論ノ最初ノ方ニ書ケナイダロウカ。

最後ニ、或一点ニ於テ $\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ ノ極限値ガ任意ノ切線ノアル曲線ニ沿ッテ一定ナラバ $f'(z_0)$ ノ存在ハワカッタガ、$z_0$ ヲ通ル直線ニ沿ッテ上ノ極限値ガ常ニ存在シテ一致シテモ $f'(z_0)$ ハ存在スルトハ限ラナイ。例ヘバ $z_0=x_0+iy_0$ ヲ通ル抛物線 $y-y_0=2(x-x_0)^2$ ト $y-y_0=\frac{1}{2}(x-x_0)^2$ トノ間デ、($z\to z_0$ ノトキニハ 0 ニナルガ、)任意ノ値ヲトリ、又上ノ二ツノ抛物線ノ外デハ常ニ0トナル函数ヲ正則函数ニ加ヘテオイテモ直線ニ沿ッテ $z_0+\Delta z\to z_0$ ナルトキ $\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ ノ極限ハカハラナイ。$\Delta z$ ガ十分小サケレバ、直線デ近ヅクトキハ抛物線ヲハナレテシマフカラ。

$\boxed{\text{正誤}}$ 8p. 9行　正規ヲ正則ニ改ム

9p. 14行. 14行全体ヲ $= \lim_{s\to 0}\mathrm{Arg}\frac{z_2(s)-z_2(0)}{s} - \cancel{\lim_{s\to 0}\mathrm{Arg}\frac{z}{s}}$

$= \lim_{s\to 0}\mathrm{Arg}\frac{z_1(s)-z_1(0)}{s}$ ト改ム。